ÉTOILES MAGIQUES A 8, 16 ET 20 BRANCHES

(24, 64 ET 100 POINTS)

ET

ROSACES HYPERMAGIQUES

(16, 25 ET 36 POINTS)

PAR

C. SALOMON.

ÉTOILES MAGIQUES A 8, 16 ET 20 BRANCHES

(24, 64 ET 100 POINTS)

ET

ROSACES HYPERMAGIQUES

(16, 25 ET 36 POINTS).

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR.

Essais de Magie arithmétique polygonale. L'Étoile magique à 8 branches (24 *points*) *et les étoiles hypermagiques impaires* (3 *n points*). Brochure in-8 (28 × 18) de 24 pages, avec 24 figures; 1912 ..... 1 fr. 50

Nouveaux Essais de Magie arithmétique polygonale. Étoiles magiques à 10 *et* 12 *branches* (30, 36, 48 *points*) *et hexagones et octogones magiques.* Brochure in-8 (28 × 18) de 26 pages, avec 24 figures; 1913.
1 fr.

QUESTIONS INÉDITES

DE

MAGIE ARITHMÉTIQUE POLYGONALE.

ÉTOILES MAGIQUES A 8, 16 ET 20 BRANCHES

(24, 64 ET 100 POINTS)

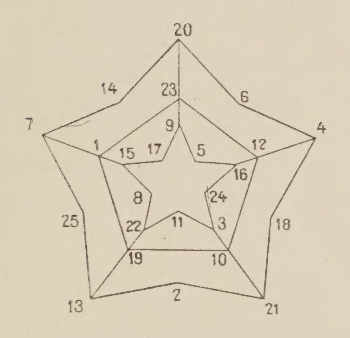
ET

ROSACES HYPERMAGIQUES

(16, 25 ET 36 POINTS)

PAR

C. SALOMON.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

ÉTOILES MAGIQUES A 8, 16 ET 20 BRANCHES

(24, 64 ET 100 POINTS)

ET

ROSACES HYPERMAGIQUES

(16, 25 ET 36 POINTS).

PRÉFACE.

De nouvelles recherches dans la magie polygonale nous ont conduit à des résultats tout à fait inespérés et qui nous ont paru susceptibles d'être appréciés des amateurs de récréations mathématiques.

Le lecteur sera sans doute surpris en constatant la simplicité des méthodes imaginées pour des constructions aussi compliquées que celles qui font l'objet de cette brève étude.

Parmi toutes les questions intéressantes traitées dans la présente brochure, nous mentionnerons tout particulièrement les figures auxquelles nous avons donné le nom de *rosaces*. On peut dire qu'elles sont réellement étonnantes, car elles possèdent une foule de propriétés magiques des plus curieuses et des plus variées.

INDICATIONS PRÉLIMINAIRES.

Un nombre quelconque pris dans la série des ab premiers nombres consécutifs peut toujours être considéré comme formé, d'une part, d'un nombre non supérieur à a, d'autre part, de l'un des termes de la progression $0, a, 2a, 3a, \ldots, (b-1)a$.

Ainsi dans le cas où $ab = 6 \times 4 = 24$ on a, par exemple, $3 = 3 + 0$, $17 = 5 + 12$, $22 = 4 + 18$.

Si l'on suppose que $ab = 8 \times 8 = 64$, on a encore $10 = 2 + 8$, $37 = 5 + 32$, $55 = 7 + 48$.

Donc, si l'on peut construire deux figures magiques de forme identique (abaques) comprenant, l'une, b fois les a premiers nombres, l'autre, a fois les termes 0, a, $2a$, $3a$, ..., $(b-1)a$, et si, en ajoutant ensemble les éléments semblablement disposés, on obtient sans répétition ni omission les ab premiers nombres, il est évident qu'on aura produit une figure totale qui sera nécessairement magique.

D'une manière générale, l'abaque formé à l'aide des nombres 1 à a sera désigné par la lettre A, tandis que celui qui est exclusivement composé des termes 0, a, $2a$, $3a$, ... $(b-1)a$ sera désigné par la lettre B.

Pour caractériser la direction des inscriptions circulaires de nombres, nous conviendrons d'appeler D le sens de celles qui seront lues suivant le mouvement des aiguilles de montres et G le sens inverse.

Également, dans un but de simplification et de clarté, les polygones seront censés numérotés 1, 2, 3, ..., en allant du plus grand au plus petit.

Ces quelques indications seront quelquefois utiles pour établir nettement certaines distinctions indispensables, surtout quand les figures sont un peu compliquées.

ÉTOILE A 8 BRANCHES

(24 POINTS).

La méthode qui va suivre est tout à fait différente de celle exposée dans notre brochure de 1912; mais elle est aussi simple et non moins curieuse.

L'abaque A (*fig.* 1) renferme uniquement les nombres 1 à 6 répétés 4 fois chacun et ainsi répartis aux points d'intersection des branches de l'étoile :

Deux nombres quelconques 3 et 4, par exemple, sont inscrits successivement quatre fois et toujours dans le même ordre aux sommets de l'octogone 1 (3-4 — 3-4 — 3-4 — 3-4).

Il en est de même pour les nombres 2 et 5 encore pris arbitrairement parmi les quatre restants et placés aux sommets de l'octogone 3 (2-5 — 2-5 — 2-5 — 2-5).

Enfin, les sommets de l'octogone 2 sont affectés des éléments 1 et 6, mais disposés cette fois par couples alternés (1-1 — 6-6 — 1-1 — 6-6).

A.

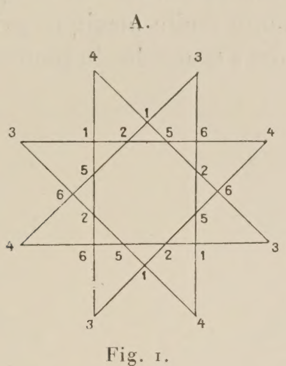


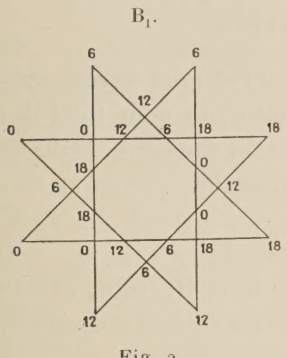
Fig. 1.

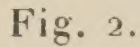
Il résulte de ce procédé que chacune des 8 lignes contient exactement les 6 premiers nombres et présente ainsi la constante $\frac{(1+6)}{2} \times 6 = 21$.

L'abaque A est, par conséquent, magique.

Dans les abaques B_1, B_2 (*fig.* 2 et 3), les termes de la progres-

B_1.




Fig. 2.

B_2.

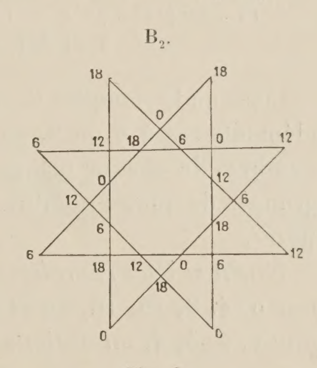


Fig. 3.

sion 0, 6, 12, 18 sont reproduits 6 fois chacun aux sommets des octogones et *marquent ainsi autant de positions pouvant être occupées indifféremment par n'importe quel terme*, *mais à la condition cependant que deux nombres diamétralement opposés soient toujours complémentaires à* 18.

La construction des abaques est telle que chacune des 8 lignes

renferme 3 fois la constante 18, et qu'un même nombre correspond toujours aux nombres 1 à 6 de l'abaque A.

Par conséquent, la superposition des abaques A et B_1, A et B_2 (*fig.* 4 et 5) donnera une étoile magique présentant la constante $21 + (3 \times 18) = 75$ dans toutes les branches.

$A + B_1$.

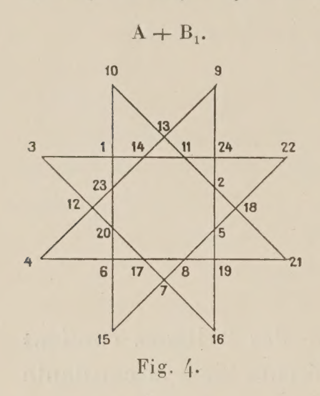


Fig. 4.

$A + B_2$.

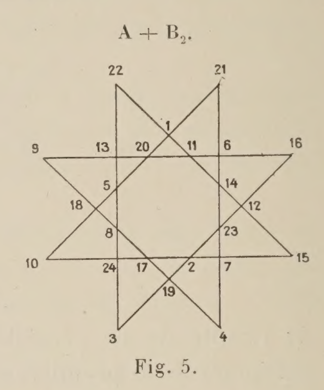


Fig. 5.

On remarquera aussi dans la figure 5 que cette même constante 75 est la somme des 6 nombres des 8 groupes

9-13-20-5-18-10 — 21-1-20-11-6-16 — 21-6-14-11-1-22
15-12-14-23-7-4 — 15-7-2-23-12-16 — 3-19-2-17-24-10
3-24-8-17-19-4 — 9-18-8-5-13-22.

Lorsque les couples de nombres composant l'abaque A sont complémentaires à 7 on a, en outre, la constante 100 pour total des nombres de chaque octogone et la constante 50 dans une foule de groupes de quatre nombres disposés en rectangles, carrés et trapèzes.

Enfin si l'on remplace, dans les abaques A, 1, 2, 3, 4, 5, 6 *par* 0, 4, 8, 12, 16, 20 *et dans les abaques* B_1 *et* B_2, 0, 6, 12, 18 *par* 1, 2, 3, 4, *on obtient encore de nouvelles étoiles magiques.*

ÉTOILE A 16 BRANCHES

(64 POINTS).

Les 4 polygones de 16 côtés déterminés par les intersections des 16 branches de l'étoile (*fig.* 6) sont pourvus chacun de deux séries identiques consécutives composées des 8 premiers nombres ins-

crits uniformément dans le même ordre, de sorte que deux extrémités diamétralement opposées d'un polygone sont toujours affectées d'un même nombre.

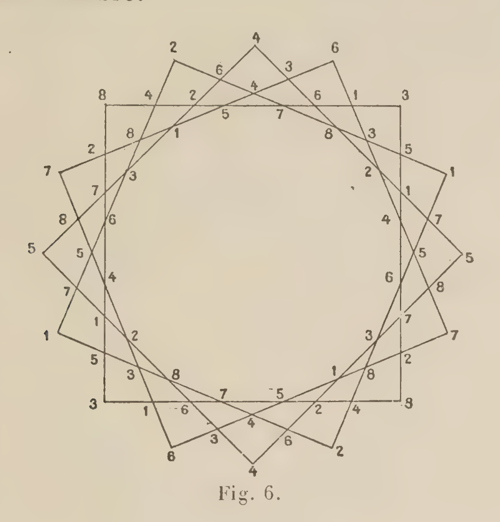


Fig. 6.

Les 8 positions marquées par un même nombre sont reliées entre elles par une ligne polygonale fictive invariable. Cette ligne est la clef de la construction de l'abaque puisqu'elle détermine dans chaque polygone l'origine des séries circulaires de 8 nombres.

La conséquence directe du procédé qui vient d'être exposé, c'est que *chaque branche contient exactement les nombres* 1 *à* 8 ; elle est évidemment magique et présente la constante $\left(\frac{1+8}{2}\right) \times 8 = 36$.

L'ordre circulaire des nombres de la série est d'ailleurs absolument arbitraire et l'on peut les faire permuter de toutes les manières possibles.

Dans l'abaque B (*fig.* 7) ce sont les termes de la progression 0, 8, 16, ..., 56 qui sont placés aux 64 points d'intersection.

Voici comment s'opère la répartition :

A partir de l'extrémité gauche du diamètre horizontal du 1er polygone et aux 4 premiers points de la branche supérieure inclinée à 45°, inscrivons *dans un ordre quelconque* les termes 0, 24, 40, 48 ou 8, 16, 32, 56, *qui sont tels que leur somme est, dans*

chaque groupe, de $\left(\frac{0+56}{2}\right) \times 4$, *sans qu'aucun d'eux soit complémentaire à 56 d'un autre terme compris dans son groupe.*

Supposons que l'ordre des quatre termes soit 48, 0, 24, 40. On inscrira d'abord, dans le sens D, 8 fois de suite le 2e et le 4e termes

B.

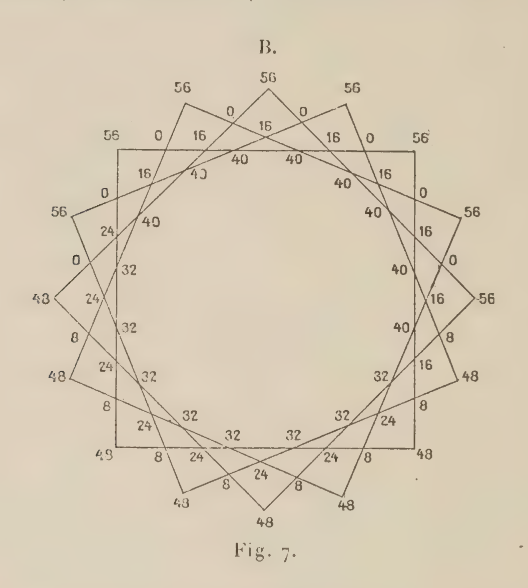


Fig. 7.

suivant les sommets des 2e et 4e polygones; puis, dans le sens G, on portera encore 8 fois de suite les 1er et 3e termes le long des sommets des 1er et 3e polygones. Ensuite, on complétera ainsi les inscriptions aux 8 sommets restant à pourvoir dans chaque polygone :

Le 1er recevra 8 fois le complémentaire à 56			du 2e terme;
Le 2^e	»	»	du 1er terme;
Le 3^e	»	»	du 4e terme;
Le 4^e	»	»	du 3e terme;

Ce mode de construction a pour effet de répartir les nombres 8, 16, 32, 56 sur 4 points consécutifs partant d'une extrémité de la branche parallèle à celle qui contient 0, 24, 40, 48.

Toutes les autres demi-branches sont composées de couples de nombres complémentaires à 56.

L'abaque B est donc magique, car toutes ses lignes présentent

la constante $4 \times 56 = 224$ et la superposition des deux abaques A et B (*fig.* 8) produira nécessairement une étoile magique avec les 64 premiers nombres.

Il ne saurait y avoir omission ou répétition, les nombres 1 à 8

A + B.

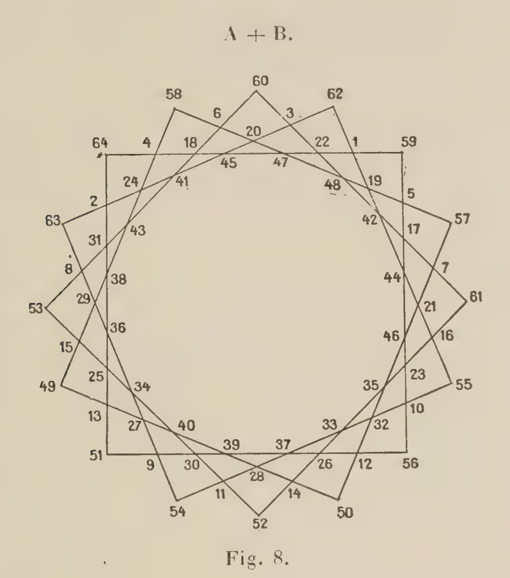


Fig. 8.

étant ajoutés successivement 8 fois chacun aux termes de la progression 0, 8, 16, ..., 56.

La constante dans chaque branche est de $36 + 224 = 260$; mais elle se manifeste aussi dans divers autres groupes.

Ainsi, partant des deux extrémités d'une branche *quelconque*, les 4 premiers nombres étant totalisés de part et d'autre ont encore 260 pour somme. Exemple : 64-2-31-38 — 59-5-17-44.

En outre, on remarque la constante dans tous les groupes analogues à 2-64-6-60-1-59-7-61 (sens D); 44-42-48-47-21-17-19-22 (sens G), et la constante 260×2 dans tout groupe (sens G) tel que $(64 + 63 + 53 + 49 + 51 + 54 + 52 + 50) + (2 + 8 + 15 + 13 + 9 + 11 + 14 + 12)$.

Les abaques A *et* B *peuvent être orientés de n'importe quelle manière; ils donnent chaque fois une étoile magique différente.*

Enfin, si l'on remplace dans l'abaque A, 1, 2, 3, ..., 8 *res-*

pectivement par 0, 8, 16, ..., 56, *et réciproquement dans l'abaque* B, 0, 8, 16, ..., 56 *par* 1, 2, 3, ..., 8, *on aura encore des solutions absolument différentes des premières.*

ÉTOILE A 20 BRANCHES

(100 POINTS).

La loi de formation de l'abaque A (*fig.* 9) est absolument la même que celle de la figure 6.

Les deux séries circulaires renferment les 10 premiers nombres disposés à volonté.

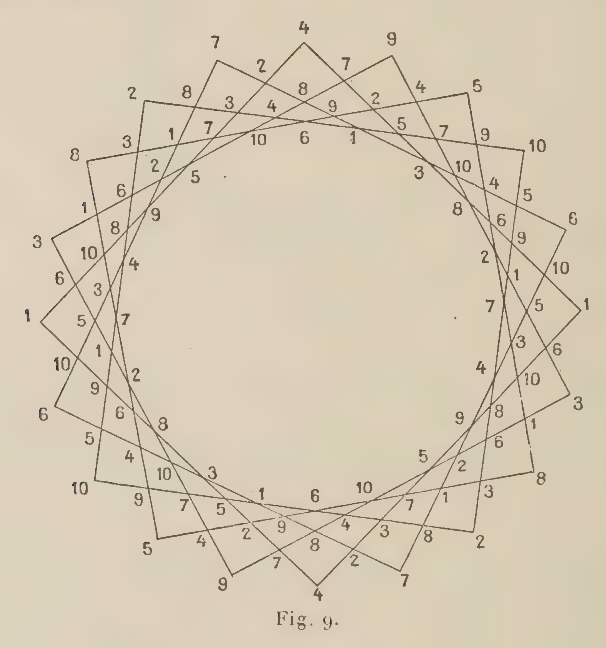


Fig. 9.

Comme dans l'étoile à 8 branches, *une ligne polygonale fictive géométriquement invariable relie entre eux les* 10 *nombres semblables* (abaque *fig.* 9) *et marque le point de départ de la série dans chacun des cinq polygones.*

La constante est, pour chaque branche, égale à $\left(\frac{1+10}{2}\right)\times 10 = 55$.

La méthode relative à la construction de l'abaque B de 64 nombres ne peut être employée pour celui de 100 nombres ; cela

tient uniquement à ce que la moitié de 10 n'est pas un multiple de 2.

Voici, en conséquence, le procédé que nous avons imaginé (abaque B, *fig.* 10) :

Deux des termes de la progression 0, 10, 20, ..., 90, déterminés

B.

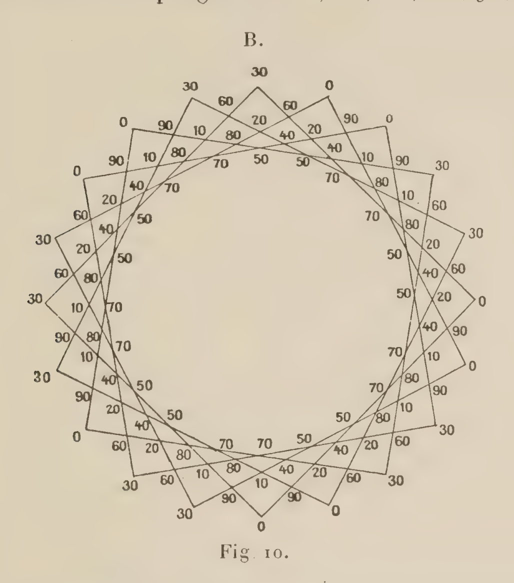


Fig. 10.

ainsi qu'il va être expliqué, accompagnent constamment les 20 sommets de chaque polygone et forment cinq chaînes ininterrompues de couples alternés comme ... 0-0 — 30-30 ... 60-60 — 90-90 ....

Il résulte de ceci que deux branches de l'étoile prises de 5 en 5 sont identiquement composées et se présentent périodiquement sous les quatre formes :

$$
\begin{array}{cccccccccc}
a & b & e & f & g & h & i & j & b & a, \\
a & b & e & f & h & h & i & e & b & c, \\
c & d & j & i & h & g & f & e & d & c, \\
c & d & j & i & g & g & f & j & d & a.
\end{array}
$$

Ces différents termes sont assujettis à remplir les conditions

$$
\begin{gathered}
a+b=c+d=90, \\
2(a+b)+(e+f+g+h+i+j)=450, \\
a+g+j=c+h+e.
\end{gathered}
$$

L'abaque B réunissant les conditions posées est donc magique,

car la constante 450 règne dans ses 20 lignes; par conséquent la réunion des abaques A et B (*fig.* 11) donne une étoile magique comprenant les 100 premiers nombres, et la constante dans chaque branche est de $55 + 450 = 505$.

A + B.

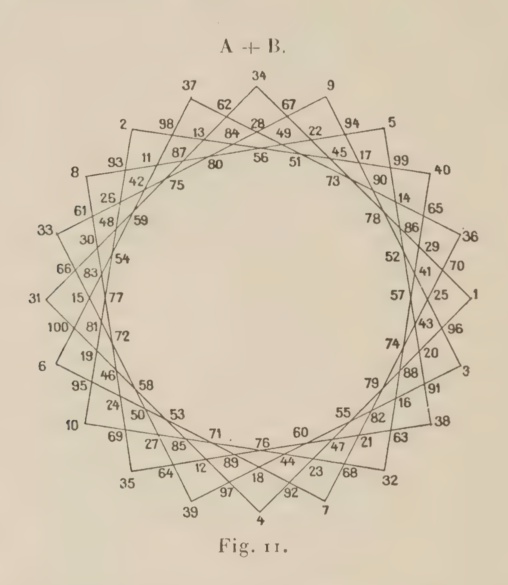


Fig. 11.

On obtient encore ce total en additionnant les 10 nombres de chacun des 20 groupes analogues à 66-61-93-98-62 — 37-34-9-5-40 (1[er] et 2[e] polygones).

Cette propriété accessoire est due à la première condition qui vient d'être énoncée.

Enfin, *dans chaque polygone*, la somme de 4 nombres consécutifs quelconques est la même que celle des 4 nombres diamétralement opposés.

On peut utiliser les abaques A *et* B *dans toutes les orientations et l'on a chaque fois une solution nouvelle.*

Si l'on remplace dans l'abaque A, 1, 2, 3, ..., 10 *respectivement par* 0, 10, 20, ..., 90 *et inversement, dans l'abaque* B, 0, 10, 20, ..., 90 *par* 1, 2, 3, ..., 10, *on obtient encore d'autres solutions différentes.*

Nota. — Nous avons cherché à construire à l'aide des méthodes qui précèdent d'autres étoiles de $4n^2$ points; mais nous avons dû

reconnaître l'impossibilité de composer l'abaque A des étoiles de 144 et de 196 points, qui ont fait l'objet de nos essais, et nous sommes fondé à croire qu'il en est de même, à plus forte raison, au fur et à mesure que n augmente.

ROSACES.

La théorie de ces constructions étant identiquement la même dans les trois cas, il nous suffira de décrire les abaques de l'une d'elles, celle de 25 points par exemple. Quant aux deux autres, nous indiquerons seulement les figures définitives résultant de la superposition des abaques, que le lecteur saura reconstituer sans éprouver la moindre difficulté.

Ces sortes de constructions, remarquables par leurs nombreuses et surprenantes particularités magiques, sont essentiellement composées de n^2 points. On constatera dans chacune d'elles l'existence de n axes ou diamètres, n polygones concentriques de n côtés et $2\,n$ polygones adjacents de n côtés aussi, mais rangés circulairement.

La rosace de 9 points peut être dessinée; mais il est impossible de la rendre magique.

Au delà de $n = 6$, on ne peut composer de schémas analogues aux rosaces qui viennent d'être définies.

ROSACE DE 25 POINTS.

Les deux abaques (*fig.* 12 et 13) sont constitués d'après la même règle que les figures 6 et 9.

L'ordre circulaire *quelconque* des nombres 1, 2, 3, 4, 5 — 0, 5, 10, 15, 20 est encore identique dans les 5 pentagones concentriques et les positions respectives d'un même nombre *sont fixées par les lignes polygonales fictives invariables* 1-1-1-1-1 — 3-3-3-3-3 ... (abaque A, sens D), 10-10-10-10-10 — 20-20-20-20-20 ... (abaque B, sens G).

Ces deux lignes ou *grilles* sont *rigoureusement symétriques*

lorsque les centres des abaques sont situés sur une normale à leurs axes verticaux.

A.

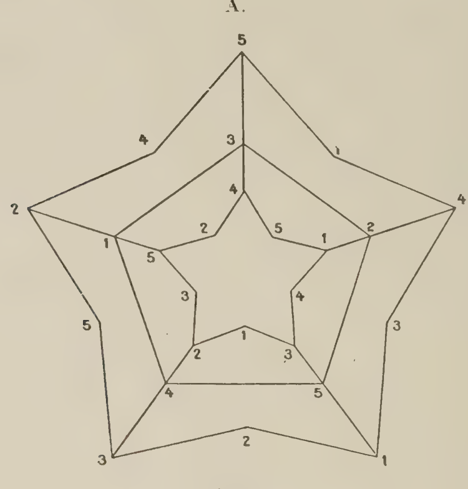


Fig. 12.

Ceci dit, ne considérons pour le moment que la ligne 1-1-1-1-1 de l'abaque A (*fig.* 12) et faisons abstraction de toutes les autres

B.

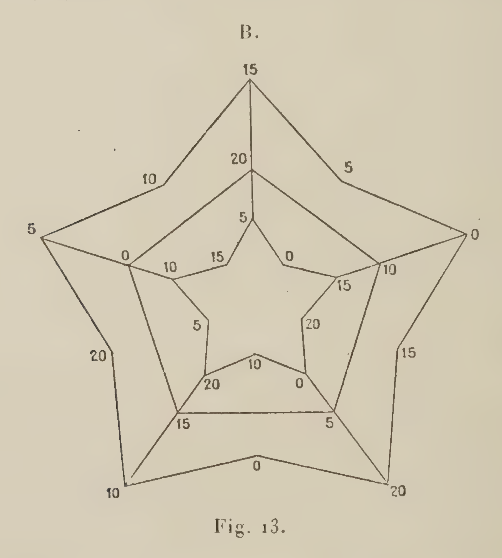


Fig. 13.

inscriptions. On constatera tout d'abord que chaque diamètre ou polygone contient une fois, et *une fois seulement* le nombre 1.

Si maintenant on suppose que cette ligne polygonale, tournant autour du centre comme pivot, soit affectée successivement des nombres 3, 2, 5, 4 (sens D), il est clair que tous les diamètres et polygones renfermeront chacun exactement les 5 nombres 1, 2, 3, 4, 5, d'où résultera la constante $\left(\frac{1+5}{2}\right) \times 5 = 15$ dans tous les diamètres et pentagones.

Pareillement composé, l'abaque B sera également magique et la constante $\left(\frac{0+20}{2}\right) \times 5 = 50$ se manifestera dans tous les diamètres et pentagones.

Il reste à démontrer qu'il ne peut y avoir omission ou répétition en superposant les abaques.

En effet, la ligne 1-1-1-1-1 a pour symétrique dans l'abaque A, 4-5-3-1-2.

Ce sont ces 5 nombres qui viendront se superposer sur les nombres 10-10-10-10-10 (abaque B).

Or, les nombres 4-5-3-1-2 occupent, par rapport à l'origine 1, respectivement les *cinquième*, *quatrième*, *deuxième*, *premier et troisième rangs* dans la série circulaire 1-3-2-5-4.

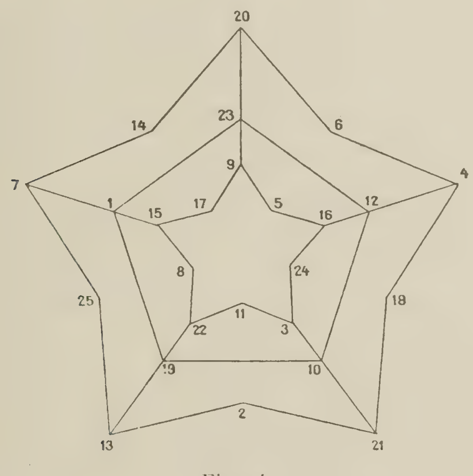


Fig. 14.

Il en sera évidemment de même lorsque l'origine sera devenue tour à tour 3, 2, 5, 4 correspondant aux séries 3-2-5-4-1 — 2-5-4-1-3 — 5-4-1-3-2 — 4-1-3-2-5, *et comme les cinquième, qua-*

trième, deuxième, premier et troisième rangs considérés seront toujours nécessairement les nombres 1, 2, 3, 4, 5 *rangés dans un certain ordre*, il est clair que les 5 premiers nombres s'ajouteront successivement à 10, puis à 20, 5, 15, 0 et qu'ainsi la réunion des deux abaques aura pour effet de reproduire intégralement, sans omission ni répétition, les 25 premiers nombres.

La constante totale sera alors de $15 + 50 = 65$ dans les 5 diamètres, les 5 pentagones concentriques et les 10 pentagones adjacents (*fig.* 14).

De plus, les 5 nombres appartenant aux groupes *analogues aux suivants* donnent aussi la somme magique 65, et cette énumération, déjà longue, est probablement incomplète, car nous avons noté les groupes à peu près au hasard de leur rencontre, sans nous astreindre à les rechercher tous :

20-23- 9-12- 1 — 14-20- 6-22- 3 — 14-20- 6-23- 2
17- 9- 5-13-31 — 14-23- 6-17- 5 — 23- 9-11-17- 5
1-20-12- 8-24 — 20- 9-22-11- 3 — 20- 2- 8-11-24
23-11-19-10- 2 — 7-15-23-16- 4 — 23- 9- 2-15-16
6-15-17-24- 3 — 25- 1- 9-12-18 — 9-11- 2-25-18
7-25-11-18-4.

Ces propriétés accessoires s'expliquent comme précédemment par la considération du rang des termes des séries circulaires.

Soit, en effet, un quelconque des groupes ci-dessus,

$$20 + 9 + 22 + 11 + 3 = 65,$$

représenté dans l'abaque A par 5-4-2-1-3.

Il est d'abord évident que le procédé de construction des abaques et la parfaite symétrie de leurs lignes polygonales entraîne, dans l'abaque B, la présence de 5 nombres *différents*, 15-5-20-10-0, correspondant respectivement à 5-4-2-1-3; et il n'est pas douteux que la démonstration qui va s'appliquer à la figure 12 convienne également à la figure 13.

Cela admis, considérons le nombre 5 comme origine de la série circulaire (sens D). Les nombres 5-4-2-1-3 occupent, par rapport à l'origine 5, *les premier, deuxième, cinquième, troisième et quatrième rangs.*

Lorsque l'origine deviendra successivement 4, 1, 3, 2, correspon-

dant aux séries 4-1-3-2-5 — 1-3-2-5-4 — 3-2-5-4-1 — 2-5-4-1-3, il est certain que les nombres des groupes de même forme que 5-4-2-1-3 seront encore les *premier*, *deuxième*, *cinquième*, *troisième et quatrième rangs des termes des séries et ne pourront être autres que les 5 premiers nombres consécutifs.*

Donc, d'une manière générale, lorsque dans l'un des abaques 5 nombres *différents* seront disposés symétriquement par rapport à l'axe, il en sera de même pour les 4 autres groupes de forme identique, et l'autre abaque présentant aussi les mêmes propriétés, il s'ensuivra naturellement l'existence de la constante 65 dans les 5 groupes.

Tout ce qui a été dit à propos de la rosace de 25 points s'appliquant sans restriction à celles de 16 et 36 points, nous indiquerons simplement la composition de leurs abaques et ferons connaître les propriétés curieuses de ces constructions originales.

Ajoutons enfin que dans les trois cas les abaques peuvent être orientés à volonté et produire de nouvelles solutions.

ROSACE DE 36 POINTS.

Les abaques sont composés savoir :

A. Des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 répétés 6 fois ;

B. Des nombres 0, 6, 12, 18, 24, 30 répétés 6 fois.

La constante égale à $\left(\frac{1+6}{2} + \frac{0+30}{2}\right) \times 6 = 111$ est le total des nombres de chacun des 6 diamètres, des 6 hexagones concentriques et des 12 hexagones adjacents.

Elle se manifeste encore dans tous les groupes de 6 nombres formés comme suit et parmi lesquels la plupart se reproduisent 6 fois, les autres 3 fois :

28-36- 2-13-23- 9 — 14-35-10-27-24- 1 — 22-17- 8-25- 6-33
7-22-17- 6-33-26 — 30-31- 3-16-20-11 — 12-16-20-31- 3-29
14- 5-10-33-25-24 — 7-22-18-26-35- 3 — 22-17-27- 8- 6-31
28-36- 2- 7-15-23 — 25-16- 8-24- 5-33 — 25- 3- 8-17-34-24
22-17-27- 8-36- 1 — 7-30- 3-34-14-23 — 28-35-13- 3- 8-24
7-17-34-27-20- 6 — 7-17-34-26- 3-24 — 36-27- 1-23-16- 8
27-17-36- 1-20-10 — 35-16- 3- 8-30-19 — 28-35-13-21- 6- 8
27-8-1-35-16-24 — 30-31- 3-20-10-17.

Nous arrêtons là cette liste, mais elle peut être encore allongée. Le lecteur qui voudra bien s'armer de patience et classer méthodiquement les groupes découvrira ceux qui ne sont pas mentionnés ici.

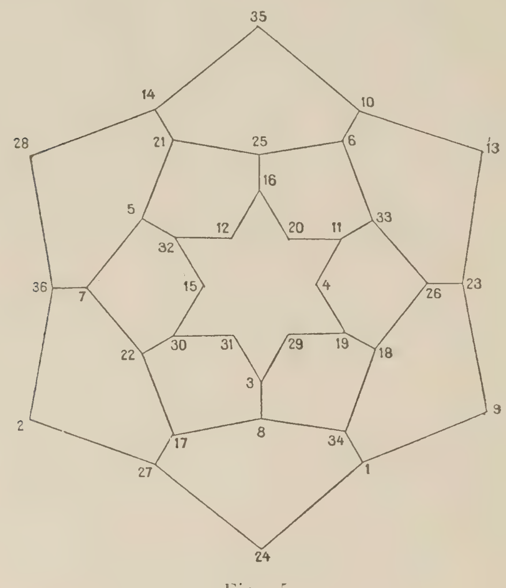


Fig. 15.

On voit que, même ainsi limitées, les propriétés de ces dernières figures sont vraiment bien remarquables.

ROSACE DE 16 POINTS.

Les abaques sont formés :

A. Des nombres 1, 2, 3, 4 répétés 4 fois;
B. Des nombres 0, 4, 8, 12 répétés 4 fois.

La constante $\left(\frac{1+4}{2}+\frac{0+12}{2}\right)\times 4 = 34$ se manifeste dans les 4 diamètres, les 4 carrés concentriques et les 8 quadrilatères adjacents.

Remarquons aussi que les groupes 5-15-12-2 — 12-6-3-13 — 3-9-14-8 — 14-4-5-11 donnent également la constante 34.

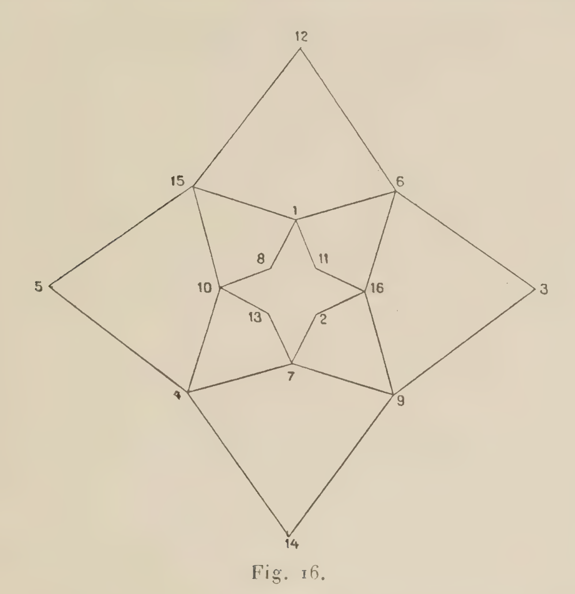


Fig. 16.

Les propriétés de cette rosace sont bien moins étendues que celles des deux autres ; mais cela s'explique aisément quand on considère le petit nombre de points qui la composent.

PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.

53320 QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.